

# **Grenzen algorithmischer Verfahren im Informatikunterricht**

## Partitionsproblem

Gegeben seien 38 Gegenstände mit den folgenden Massen (in Gramm):

14175, 15055, 16616, 17495, 18072, 19390, 19731, 22161, 23320,  
23717, 26343, 28725, 29127, 32257, 40020, 41867, 43155, 46298,  
56734, 57176, 58306, 61848, 65825, 66042, 68634, 69189, 72936,  
74287, 74537, 81942, 82027, 82623, 82802, 82988, 90467, 97042  
97507, 99564

Alle Gegenstände zusammen wiegen 2000000 Gramm. Die Gegenstände sollen auf zwei Container verteilt werden. Jeder Container hat eine Maximallast von 1000000 Gramm. Ist dies möglich?

# Partitionsproblem

## Partitionsproblem

Gegeben eine Menge von  $n$  Zahlen. Gibt es eine Aufteilung dieser Menge in zwei Teilmengen  $P$  und  $Q$ , so dass die Summe der Zahlen in  $P$  gleich der Summe der Zahlen in  $Q$  ist?

# Partitionsproblem

## Partitionsproblem

Gegeben eine Menge von  $n$  Zahlen. Gibt es eine Aufteilung dieser Menge in zwei Teilmengen  $P$  und  $Q$ , so dass die Summe der Zahlen in  $P$  gleich der Summe der Zahlen in  $Q$  ist?

$$S = \{3, 1, 1, 2, 2, 1\}$$

$$S_1 = \{1, 1, 1, 2\}, S_2 = \{2, 3\}$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

# Partitionsproblem

## Partitionsproblem

Gegeben eine Menge von  $n$  Zahlen. Gibt es eine Aufteilung dieser Menge in zwei Teilmengen  $P$  und  $Q$ , so dass die Summe der Zahlen in  $P$  gleich der Summe der Zahlen in  $Q$  ist?

$$S = \{3, 1, 1, 2, 2, 1\}$$

$$S_1 = \{1, 1, 1, 2\}, S_2 = \{2, 3\}$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

- Das Problem ist NP-vollständig.

**Was können wir mit unserem Computer  
berechnen?**

**Wo liegen die Grenzen?**

## Welche Inhalte spielen in einer Unterrichtseinheit eine Rolle?

- ▶ Vorkenntnisse
- ▶ Definition von P und NP
- ▶ Motivation für die Thematik
- ▶ Probleme in NP
- ▶ Implementation verschiedener Probleme
- ▶ Erweiterungen
  - ▶ Approximationsverfahren
  - ▶ NP-Vollständigkeit und NP-Härte

# Kerncurriculum

## **Q3.6 P-NP-Problematik (nur Leistungskurs)**

### **erhöhtes Niveau (Leistungskurs)**

- Grundlagen:  
Zeitkomplexität von Problemen, Nichtdeterminismus, die Klassen P und NP
- schwierige Probleme:  
polynomielle Reduktion, NP-vollständige Probleme



# Komplexitätstheorie

## Theorem

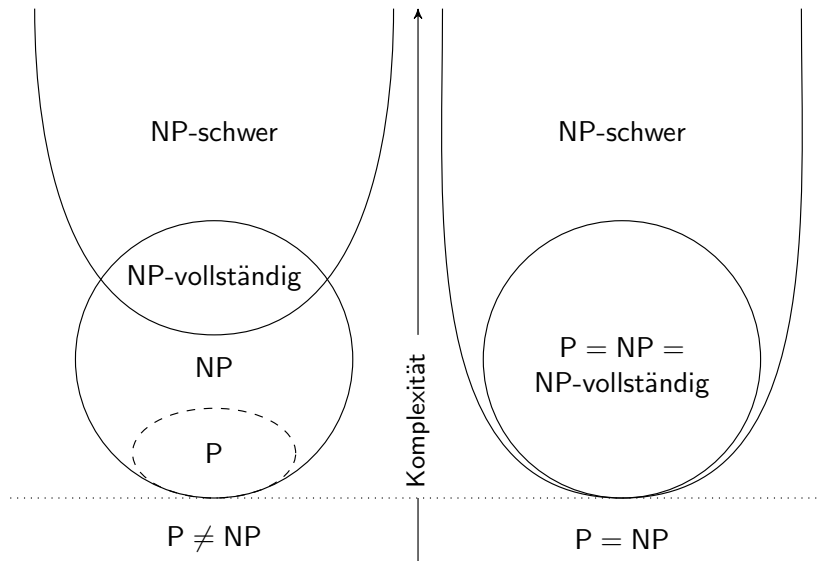
$P$  ist die Klasse der Probleme, für die es einen deterministischen Polynomialzeitalgorithmus gibt.

# Komplexitätstheorie

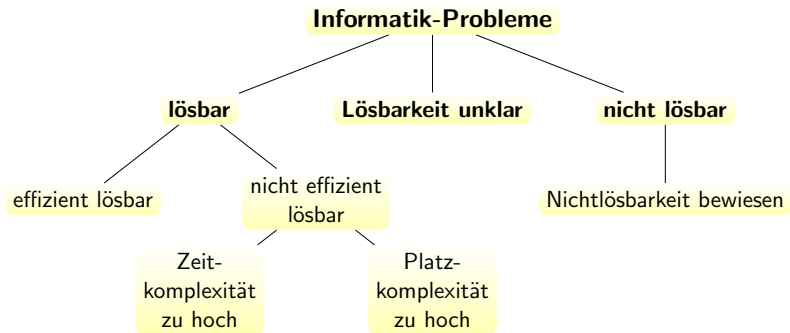
## Theorem

NP ist die Klasse der Probleme, für die es einen nichtdeterministischen Polynomialzeitalgorithmus gibt.

# NP-Vollständigkeit



# Probleme der Informatik



**$P \neq NP?$**

# Motivation

# Wieso ist die Thematik so spannend?

- ▶ Es beschreibt die **momentane Grenze** von dem, was Computer können und was nicht.
- ▶  **$P=NP$**  hätte **unvorhersehbare Auswirkungen**.
- ▶  **$P \neq NP$** ? ist ein **Millenium-Problem** und beschäftigt die Menschen schon seit Jahrhunderten.

# Wieso ist die Thematik so spannend?

- ▶ Es beschreibt die **momentane Grenze** von dem, was Computer können und was nicht.
- ▶  $P=NP$  hätte **unvorhersehbare Auswirkungen**.
- ▶  $P \neq NP$ ? ist ein **Millenium-Problem** und beschäftigt die Menschen schon seit Jahrhunderten.
  - ▶ Als **Millennium-Probleme** bezeichnet man die im **Jahr 2000** vom **Clay Mathematics Institute (CMI) in Cambridge (Massachusetts)** in einer Liste aufgezählten **ungelösten Probleme der Mathematik**.
  - ▶ Das Institut hat für die Lösung eines der sieben Probleme ein **Preisgeld** von jeweils **einer Million US-Dollar** ausgelobt.



# Das Traveling-Salesman-Problem

## TSP-DEC

Ein Handlungsreisender soll  $n$  Städte nacheinander, aber jede nur einmal, besuchen und wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren. Gibt es einen Rundweg, der höchstens die Länge  $l_{max}$  hat?

# Das Traveling-Salesman-Problem

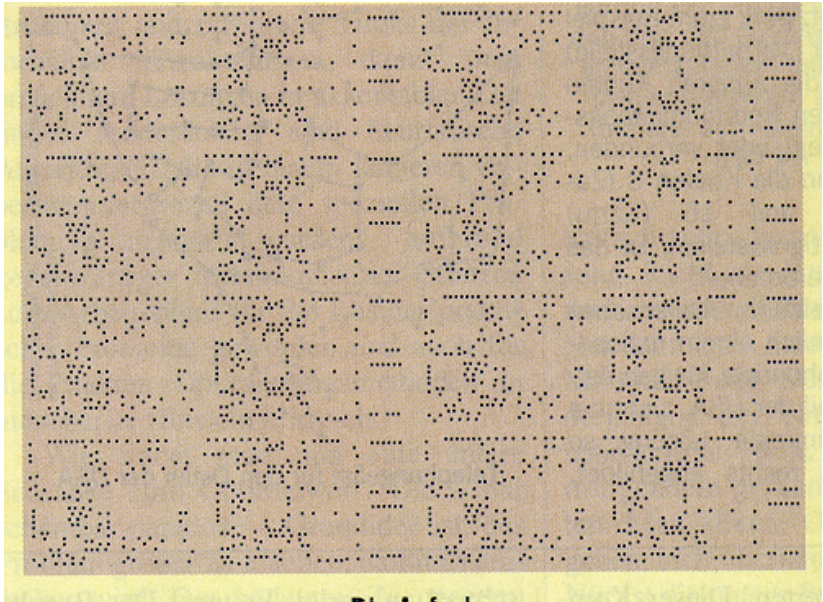
## TSP-DEC

Ein Handlungsreisender soll  $n$  Städte nacheinander, aber jede nur einmal, besuchen und wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkehren. Gibt es einen Rundweg, der höchstens die Länge  $l_{max}$  hat?

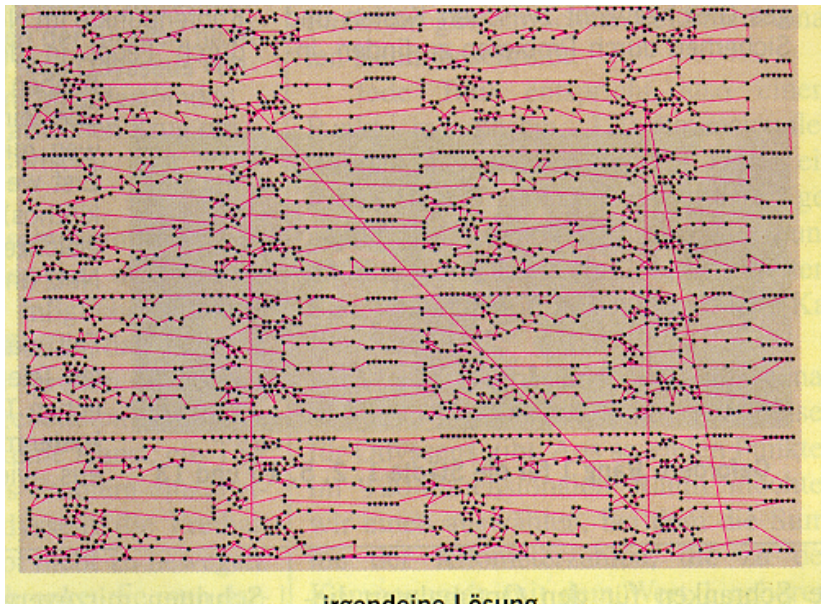
### Problem:

Bisher nur durch das Testen aller Möglichkeiten lösbar!

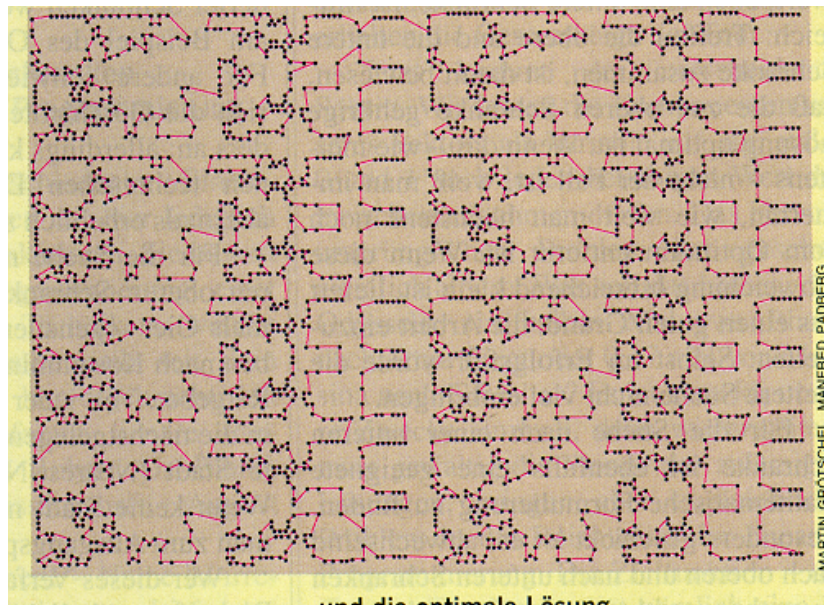
# Das Traveling-Salesman-Problem



# Das Traveling-Salesman-Problem



# Das Traveling-Salesman-Problem



# Stephen A. Cook

- ▶ Stephen Arthur Cook (\*14. Dezember 1939 in Buffalo, New York) ist Professor der Informatik an der University of Toronto in Kanada.
- ▶ Cook wurde in der theoretischen Informatik berühmt durch den Satz von Cook: „SAT ist NP-vollständig“.
- ▶ 1982 bekam er für diese Entdeckung den Turing Award.
- ▶ Cooks erster Doktorand war Walter Savitch.



## 3-Sat Problem

„Wenn es nicht regnet und die Sonne scheint, dann ist schönes Wetter. “

## 3-Sat Problem

„Wenn es nicht regnet und die Sonne scheint, dann ist schönes Wetter. “

„Wenn das Einkommen  $> 4000$  und keine Schulden, dann kreditwürdig.“



## 3-Sat Problem

„Wenn es nicht regnet und die Sonne scheint, dann ist schönes Wetter. “

„Wenn das Einkommen  $> 4000$  und keine Schulden, dann kreditwürdig.“

„Wenn die Temperatur niedrig, dann Öffnung des Heizungsventils groß.“

## 3-Sat Problem

„Wenn es nicht regnet und die Sonne scheint, dann ist schönes Wetter. “

„Wenn das Einkommen  $> 4000$  und keine Schulden, dann kreditwürdig.“

„Wenn die Temperatur niedrig, dann Öffnung des Heizungsventils groß.“

Die Bedeutung einer solchen Formel ist,

Wenn **A** wahr (bewiesen) ist,  
dann schließe, dass auch **B** wahr ist.

## 3-Sat Problem

„Wenn es nicht regnet und die Sonne scheint, dann ist schönes Wetter. “

„Wenn das Einkommen  $> 4000$  und keine Schulden, dann kreditwürdig.“

„Wenn die Temperatur niedrig, dann Öffnung des Heizungsventils groß.“

Die Bedeutung einer solchen Formel ist,

Wenn **A** wahr (bewiesen) ist,  
dann schließe, dass auch **B** wahr ist.

$$\overline{A_1} \wedge A_2$$

# 3-Sat Problem

## 3-Sat Problem

Gegeben eine in **konjunktiver Normalform** vorliegende **aussagenlogische Formel  $F$** , die **höchstens drei Literale** enthält.  
Ist  $F$  erfüllbar?

# 3-Sat Problem

## 3-Sat Problem

Gegeben eine in **konjunktiver Normalform** vorliegende **aussagenlogische Formel**  $F$ , die **höchstens drei Literale** enthält.  
Ist  $F$  erfüllbar?

$$F = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3)$$

# 3-Sat Problem

## 3-Sat Problem

Gegeben eine in **konjunktiver Normalform** vorliegende **aussagenlogische Formel**  $F$ , die **höchstens drei Literale** enthält.  
**Ist  $F$  erfüllbar?**

$$F = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3)$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$$

# 3-Sat Problem

## 3-Sat Problem

Gegeben eine in **konjunktiver Normalform** vorliegende **aussagenlogische Formel**  $F$ , die **höchstens drei Literale** enthält.  
**Ist  $F$  erfüllbar?**

$$F = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3)$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$$

$$F = (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$$

# 3-Sat Problem

## 3-Sat Problem

Gegeben eine in **konjunktiver Normalform** vorliegende **aussagenlogische Formel**  $F$ , die **höchstens drei Literale** enthält.  
Ist  $F$  erfüllbar?

$$F = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_3)$$

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$$

$$F = (1 \vee 0 \vee 0) \wedge (1 \vee 1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$$

- Das Problem ist NP vollständig.



# P-NP – Geschichte

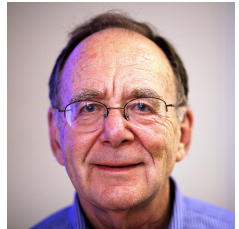
- ▶ 1971 zeigte er in dem Paper  
„The Complexity of Theorem Proving Procedures“  
die Reduktion einer nichtdeterministischen Turingmaschine,  
die in polynomieller Zeit arbeitet, auf das SAT Problem.

# P-NP – Geschichte

- ▶ 1971 zeigte er in dem Paper  
„The Complexity of Theorem Proving Procedures“  
die Reduktion einer nichtdeterministischen Turingmaschine,  
die in polynomieller Zeit arbeitet, auf das SAT Problem.
- ▶ Im Jahr darauf wurde diese Arbeit von Richard M. Karp  
erweitert. Er wies 21 NP-vollständige Probleme aus  
verschiedenen Bereichen der Mathematik und Informatik nach.

## Richard M. Karp

- ▶ Richard Manning Karp (\*3. Januar 1935 in Boston) ist ein amerikanischer Informatiker.
- ▶ 1968 wurde er Professor für Informatik, Mathematik und Operations Research an der [University of California](#), Berkeley.
- ▶ Er erhielt 1985 den [Turing Award](#).



# Rucksack Problem

## Rucksack Problem

Gegeben  $k$  natürliche Zahlen  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  und eine natürliche Zahl  $b$ . Gibt es eine Teilmenge  $R \subseteq S$ , so dass die Summe aller Zahlen in  $R$   $b$  ergibt?

# Rucksack Problem

## Rucksack Problem

Gegeben  $k$  natürliche Zahlen  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  und eine natürliche Zahl  $b$ . Gibt es eine Teilmenge  $R \subseteq S$ , so dass die Summe aller Zahlen in  $R$   $b$  ergibt?

$$S = \{3, 6, 1, 7, 3, 8\}, b = 19$$

# Rucksack Problem

## Rucksack Problem

Gegeben  $k$  natürliche Zahlen  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  und eine natürliche Zahl  $b$ . Gibt es eine Teilmenge  $R \subseteq S$ , so dass die Summe aller Zahlen in  $R$   $b$  ergibt?

$$S = \{3, 6, 1, 7, 3, 8\}, b = 19$$

$$1 + 7 + 3 + 8$$

# Rucksack Problem

## Rucksack Problem

Gegeben  $k$  natürliche Zahlen  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  und eine natürliche Zahl  $b$ . Gibt es eine Teilmenge  $R \subseteq S$ , so dass die Summe aller Zahlen in  $R$   $b$  ergibt?

$$S = \{3, 6, 1, 7, 3, 8\}, b = 19$$

$$1 + 7 + 3 + 8$$

- Das Problem ist NP-vollständig.

## Rucksack Problem

- ▶ Ein **Dieb** bricht in ein Haus ein. Er hat einen **Rucksack** dabei. Wie kann er den **maximalen Gewinn** erzielen?
- ▶ Die Fragestellung findet Anwendung in der **Logistik**. Gegeben ein **Frachtflugzeug** mit einer **Maximallast**. Bei einer Beladung soll die **maximale Last** aufgenommen werden.

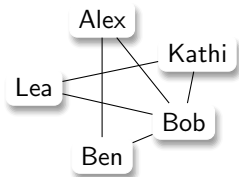


# Cliquen Problem

## Cliquen Problem

Gegeben ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine natürliche Zahl  $k$ . Besitzt  $G$  eine Clique der Größe  $k$ ?

- Eine Clique ist ein Teilgraph, in dem jedes Knotenpaar mit einer Kante verbunden sind.

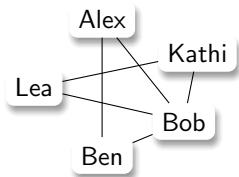


# Cliquen Problem

## Cliquen Problem

Gegeben ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine natürliche Zahl  $k$ . Besitzt  $G$  eine Clique der Größe  $k$ ?

- Eine Clique ist ein Teilgraph, in dem jedes Knotenpaar mit einer Kante verbunden sind.



- Gibt es eine Clique mit der Größe 4?
- Wie groß ist die größte Clique in Facebook?
- Das Problem ist NP-vollständig.

# HTTPS – Public Key



[Mein Konto](#) | [Hilfe](#)

## Anmelden

Wie lautet Ihre E-Mail-Adresse oder Mobiltelefonnummer?

E-Mail oder Mobiltelefonnummer:

Haben Sie ein Passwort für Amazon.de?

☐ Nein, ich bin ein neuer Kunde.

☒ Ja, ich habe ein Passwort:

[Haben Sie Ihr Passwort vergessen?](#)

Weiter (über den Sicherheitsserver)

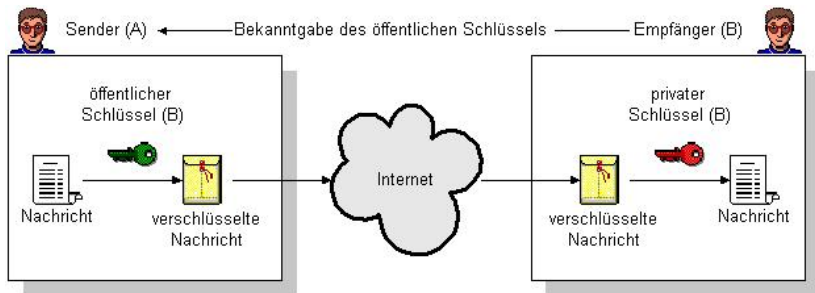


Mit Ihrer Anmeldung erklären Sie sich mit [Unseren AGB](#), unserer [Datenschutzerklärung](#) sowie den [Bestimmungen zu Cookies & Internet-Werbung](#) einverstanden.

## Hilfe zur Anmeldung

Passwort vergessen? [Passwort-Hilfe anfordern](#).

# Public Key Verschlüsselung – RSA Algorithmus



# Kryptographie – P-NP Problem

- Wähle zufällig zwei Primzahlen  $p \neq q$ .

$$p = 11, q = 13$$

# Kryptographie – P-NP Problem

- ▶ Wähle zufällig zwei Primzahlen  $p \neq q$ .

$$p = 11, q = 13$$

- ▶ Berechne den RSA-Modul  $N = p \cdot q$ .

$$11 \cdot 13 = 143$$

# Kryptographie – P-NP Problem

- ▶ Wähle zufällig zwei Primzahlen  $p \neq q$ .  
 $p = 11, q = 13$
- ▶ Berechne den RSA-Modul  $N = p \cdot q$ .  
 $11 \cdot 13 = 143$
- ▶ Berechne die Eulersche  $\phi$ -Funktion von  $N$   
 $\phi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ .  
 $\phi(143) = (11 - 1) \cdot (13 - 1) = 120$

# Kryptographie – P-NP Problem

- ▶ Wähle zufällig zwei Primzahlen  $p \neq q$ .  
 $p = 11, q = 13$
- ▶ Berechne den RSA-Modul  $N = p \cdot q$ .  
 $11 \cdot 13 = 143$
- ▶ Berechne die Eulersche  $\phi$ -Funktion von  $N$   
 $\phi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ .  
 $\phi(143) = (11 - 1) \cdot (13 - 1) = 120$
- ▶ Wähle eine zu  $\phi(N)$  teilerfremde Zahl  $e$ .  
 $e = 23$



# Kryptographie – P-NP Problem

- ▶ Wähle zufällig zwei Primzahlen  $p \neq q$ .  
 $p = 11, q = 13$
- ▶ Berechne den RSA-Modul  $N = p \cdot q$ .  
 $11 \cdot 13 = 143$
- ▶ Berechne die Eulersche  $\phi$ -Funktion von  $N$   
 $\phi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ .  
 $\phi(143) = (11 - 1) \cdot (13 - 1) = 120$
- ▶ Wähle eine zu  $\phi(N)$  teilerfremde Zahl  $e$ .  
 $e = 23$
- ▶ Berechne die Entschlüsselungskomponente  $d$  mit  
 $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ .  
 $23 \cdot 47 \equiv 1 \pmod{120}$

# Kryptographie – P-NP Problem

- ▶ Wähle zufällig zwei Primzahlen  $p \neq q$ .  
 $p = 11, q = 13$
- ▶ Berechne den RSA-Modul  $N = p \cdot q$ .  
 $11 \cdot 13 = 143$
- ▶ Berechne die Eulersche  $\phi$ -Funktion von  $N$   
 $\phi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ .  
 $\phi(143) = (11 - 1) \cdot (13 - 1) = 120$
- ▶ Wähle eine zu  $\phi(N)$  teilerfremde Zahl  $e$ .  
 $e = 23$
- ▶ Berechne die Entschlüsselungskomponente  $d$  mit  
 $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ .  
 $23 \cdot 47 \equiv 1 \pmod{120}$

Verschlüsseln der Zahl 7:  $2 \equiv 7^{23} \pmod{143}$

Entschlüsseln der Zahl 2:  $7 \equiv 2^{47} \pmod{143}$

# Kryptographie – P-NP Problem

- ▶ Wähle zufällig zwei Primzahlen  $p \neq q$ .  
 $p = 11, q = 13$
- ▶ Berechne den RSA-Modul  $N = p \cdot q$ .  
 $11 \cdot 13 = 143$
- ▶ Berechne die Eulersche  $\phi$ -Funktion von  $N$   
 $\phi(N) = (p - 1) \cdot (q - 1)$ .  
 $\phi(143) = (11 - 1) \cdot (13 - 1) = 120$
- ▶ Wähle eine zu  $\phi(N)$  teilerfremde Zahl  $e$ .  
 $e = 23$
- ▶ Berechne die Entschlüsselungskomponente  $d$  mit  
 $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\phi(N)}$ .  
 $23 \cdot 47 \equiv 1 \pmod{120}$
- ▶ Das Schwierige beim Entschlüsseln ohne Geheimschlüssel ist das Faktorisieren der Zahl  $N$ .
- ▶ Kann ein Algorithmus nichtdeterministisch arbeiten, dann rät er die Zahlen  $p$  und  $q$ .

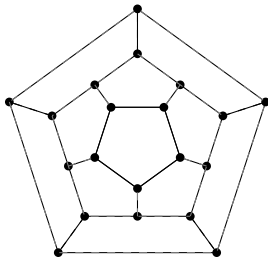
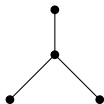
**Ist nicht vielleicht doch  $P=NP$ ?**

## **Ein freundschaftlicher Umtrunk – Hamiltonkreis**

# Hamiltonkreis

## Theorem

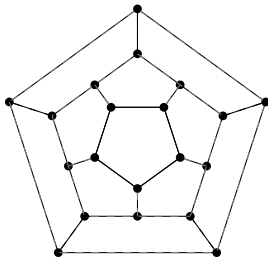
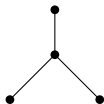
Ein **Hamiltonpfad** besucht alle Knoten eines Graphen genau einmal.  
Ein **Hamiltonkreis** kehrt außerdem zum Anfangsknoten zurück.



# Hamiltonkreis

## Theorem

Ein **Hamiltonpfad** besucht alle Knoten eines Graphen genau einmal.  
Ein **Hamiltonkreis** kehrt außerdem zum Anfangsknoten zurück.

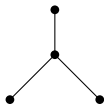


Dieser Graph besitzt  
keinen **Hamilton-Kreis**.

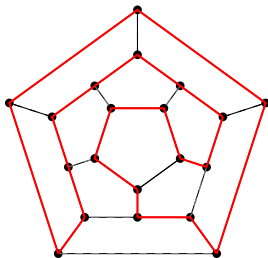
# Hamiltonkreis

## Theorem

Ein **Hamiltonpfad** besucht alle Knoten eines Graphen genau einmal.  
Ein **Hamiltonkreis** kehrt außerdem zum Anfangsknoten zurück.



Dieser Graph besitzt  
keinen **Hamilton-Kreis**.



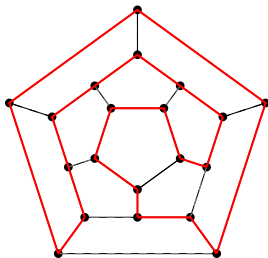
Dieser Graph besitzt  
einen **Hamilton-Kreis**.



# Hamiltonkreis

## Theorem

Ein **Hamiltonpfad** besucht alle Knoten eines Graphen genau einmal.  
Ein **Hamiltonkreis** kehrt außerdem zum Anfangsknoten zurück.



Dieser Graph besitzt  
keinen **Hamilton-Kreis**.

Dieser Graph besitzt  
einen **Hamilton-Kreis**.

► Dieses Problem ist **NP-vollständig**.

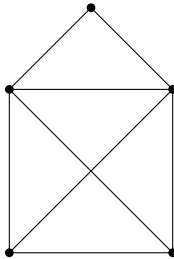
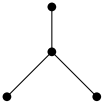
## Eulerkreis

- ▶ Eine kleine Veränderung ergibt den Eulerkreis.
- ▶ Kann eine Figur in einem Zug nachgemalt werden?
- ▶ Gegeben eine Inselkette und Verbindungen zwischen diesen Inseln. Kann eine Frachtschiff jede einzelne Verbindung nacheinander abfahren, ohne eine Verbindung doppelt zu verwenden?

# Eulerkreis

## Theorem

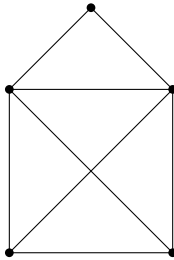
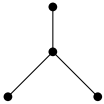
Ein **Eulerpfad** durchläuft alle Kanten eines Graphen genau einmal, ein **Eulerkreis** kehrt außerdem zum Anfangsknoten zurück.



# Eulerkreis

## Theorem

Ein **Eulerpfad** durchläuft alle Kanten eines Graphen genau einmal, ein **Eulerkreis** kehrt außerdem zum Anfangsknoten zurück.



- Dieses **Problem** kann durch **Testen** der Eingangsgrade in  $O(n^2)$  Zeit gelöst werden.

# Sat Problem

## 3-Sat Problem

Gegeben eine in konjunktiver Normalform vorliegende aussagenlogische Formel  $F$ , die höchstens drei Literale enthält. Ist  $F$  erfüllbar?

- Dieses Problem ist NP-vollständig.

# Sat Problem

## 3-Sat Problem

Gegeben eine in konjunktiver Normalform vorliegende aussagenlogische Formel  $F$ , die höchstens **drei** Literale enthält. Ist  $F$  erfüllbar?

- Dieses Problem ist **NP-vollständig**.

## 2-Sat Problem

Gegeben eine in konjunktiver Normalform vorliegende aussagenlogische Formel  $F$ , die höchstens **zwei** Literale enthält. Ist  $F$  erfüllbar?

- Dieses Problem ist in **P**.

# Primzahlen

- ▶ Lange Zeit glaubte man, dass das Testen einer Primzahl nicht in  $P$  läge und man damit  $P \neq NP$  zeigen kann.
- ▶ 2002 wurde jedoch von Agrawal, Kayal und Saxena ein Algorithmus in  $O(n^6)$  entwickelt, der für eine Zahl testet, ob sie eine Primzahl ist.

**Nicht immer ist der optimale Weg der sinnvollste**



# Bin packing

## Bin packing

Gegeben seien  $n$  Objekte der Größen  $s_1, \dots, s_n$  mit  $0 < s_i \leq 1$ , für  $1 \leq i \leq n$ . Gesucht ist die kleinstmögliche Anzahl von Kisten (Bins) der Größe 1, mit der alle Objekte verpackt werden können.

# Bin packing

## Bin packing

Gegeben seien  $n$  Objekte der Größen  $s_1, \dots, s_n$  mit  $0 < s_i \leq 1$ , für  $1 \leq i \leq n$ . Gesucht ist die kleinstmögliche Anzahl von Kisten (Bins) der Größe 1, mit der alle Objekte verpackt werden können.

- Dieses Problem ist NP-vollständig.

# Bin packing – Heuristik

Idee für einen Approximationsalgorithmus:

- ▶ Sortiere die Objekte zunächst nach abnehmender Größe.
- ▶ Verpacke die Objekte in absteigender Reihenfolge. Wähle dabei immer den ersten Behälter in dem noch genug Platz ist.
- ▶ Sind alle Behälter voll, füge einen neuen hinzu.

Laufzeit und Güte der Lösung

- ▶ Der obige Approximationsalgorithmus First Fit Decreasing löst das Problem asymptotisch mit Gütegarantie  $\frac{11}{9}$ .
- ▶ Die Laufzeit ist  $O(n \cdot \log n)$ .

## Traveling Salesman Problem – Nearest-Insertion-Heuristik

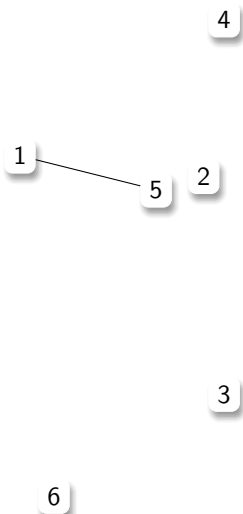
- ▶ Das Travelling Salesman Problem ist NP-vollständig.
- ▶ Bei Vorliegen der Dreiecksungleichung gibt es Algorithmen, die in  $O(n^2)$  eine maximal 1,5 fach schlechtere Lösung berechnen.

# Traveling Salesman Problem – Nearest-Insertion Heuristik

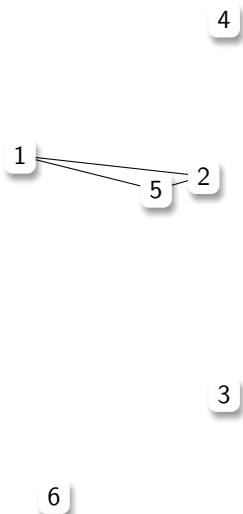
## Nearest-Insertion Heuristik

- ▶ Wähle einen Knoten mit der geringsten Entfernung zu einem Knoten der schon konstruierten Teilroute.
- ▶ Baue diesen Knoten in die vorhandene Teilroute ein, so dass die geringste Verlängerung der bisherigen Teilroute entsteht.
- ▶ Bei Vorliegen der Dreiecksungleichung kann die Länge der gefundenen Rundreise aber nicht schlechter als das Doppelte der Länge einer optimalen Rundreise sein. Die Laufzeit liegt in  $O(n^2)$ .

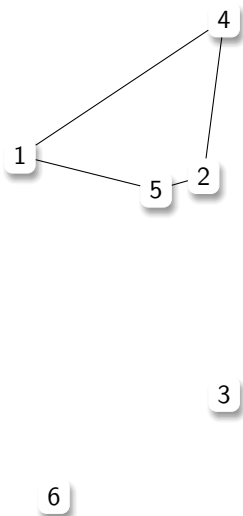
# Traveling Salesman Problem – Nearest-Insertion Heuristik



# Traveling Salesman Problem – Nearest-Insertion Heuristik

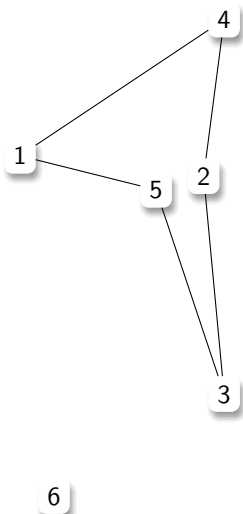


## Traveling Salesman Problem – Nearest-Insertion Heuristik

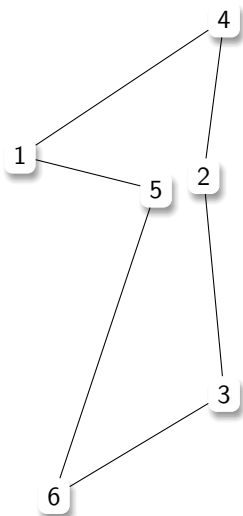




## Traveling Salesman Problem – Nearest-Insertion Heuristik



## Traveling Salesman Problem – Nearest-Insertion Heuristik



**Danke für die Aufmerksamkeit!**