

Postsches Korrespondenzproblem



Emil Post

Emil Post war ein polnischer Mathematiker, der 1947 als Erster die Unentscheidbarkeit eines Problems der klassischen Mathematik bewies. Er nutzte dafür das Postsches Korrespondenzproblem.



Es ist bis heute eines der wichtigsten Probleme, die zum Beweisen von Unentscheidbarkeiten benutzt werden.

Rätsel

- Schneide die beigelegten Dominosteine aus.
- Versucht in Zweiergruppen eine Sequenz der Dominosteine zu legen, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:
 - Ihr müsst zwei Reihen legen, eine gelbe und eine weiße.
 - Jedes mal wenn ihr ein Domino mit der Markierung 1 (2,...) in die weiße Reihe legt müsst ihr direkt auch einen mit der Markierung 1 (2,...) in die gelbe Reihe legen und umgekehrt.
 - An jeder Stelle müssen die Anzahl der Punkte der beiden Reihen übereinstimmen.
 - Wenn beide Reihen gleich lang sind, habt ihr eine Lösung gefunden.

- Gegeben seien die beiden Listen
 - $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ mit den Elementen $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 101, u_4 = 011$ und
 - $\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ mit den Elementen $v_1 = 001, v_2 = 101, v_3 = 1, v_4 = 0$.

Finde eine Lösung dieser PCP Instanz.

- Schreibe ein Programm, das eine PCP Instanz einliest und dann sukzessive nach einer Lösung sucht. Wenn eine Lösung gefunden wurde, bricht das Programm ab und gibt die Lösung aus.
- Angenommen, sie wüssten nicht, dass das Halteproblem nicht entscheidbar ist, jedoch dass das PCP nicht entscheidbar ist. Was würde es für das Halteproblem bedeuten, wenn sie, wie im ersten Teil dieser Aufgabe getan, ein Programm dafür schreiben?

Postsches Korrespondenzproblem

Das Postsche Korrespondenzproblem ist eins der ersten Probleme, für das gezeigt wurde, dass es nicht entscheidbar ist.

Eine Instanz des *Postschen Korrespondenzproblems* (PCP) ist durch zwei Listen:

$\alpha = u_1, u_2, \dots, u_n$ und $\beta = v_1, v_2, \dots, v_n$ von Zeichenketten über einem Alphabet Σ gegeben. Die Listen müssen die gleiche Anzahl von Elementen haben. Für jeden Index i mit $1 \leq i \leq n$, wird das Paar (u_i, v_i) als *dazugehörig* bezeichnet. Die Frage ist, ob es eine endliche nichtleere Sequenz von Indizes i_1, i_2, \dots, i_k gibt so dass $u_{i_1}u_{i_2} \dots u_{i_k} = v_{i_1}v_{i_2} \dots v_{i_k}$ gilt. Ist dies der Fall, wird die Sequenz i_1, i_2, \dots, i_k als *Lösung* bezeichnet. Die Frage, ob ein gegebenes System eine Lösung besitzt, ist im Allgemeinen nicht entscheidbar. Dies wurde von Emil Post gezeigt.

